Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Гимназия № 53» г. Пензы

Знакомые фигуры в незнакомой метрике

Выполнила:
Салитова Ангелина Артемовна
9 класс

Научный руководитель:
доцент кафедры «Математическое образование» ПГУ,
к. ф.-м. н. Монахова Оксана Александровна

Пенза 2023

Оглавление

Введение

Термины «пространство», «метрическое пространство» берут начало в геометрии. Даже по самому этимологическому значению слова «геометрия», «метрическое» имеют общее – оба они производные древнегреческого слова metreo – «измеряю». Этот факт объясняет, в частности то, что теория метрических пространств как геометрическая теория происходит из потребностей измерений.

Пространство, в котором определено расстояние между любыми точками (задана метрика), называют метрическим пространством. Принятый в евклидовой геометрии способ измерения расстояния не всегда удобен на практике, например, с точки зрения водителя, измеряющего расстояние между двумя пунктами не по прямой, а вдоль дорог, соединяющих эти пункты. Кроме практической необходимости введения неевклидова расстояния, существуют другие приложения теории метрических пространств.

Геометрия пространств с неевклидовой метрикой отличается от привычной геометрии. Многие геометрические объекты приобретают новые свойства, интересные не только с теоретической, но и с практической точки зрения, поэтому их изучение **актуально**.

Целью представленной работы является изучение некоторых метрических пространств и описание некоторых геометрических объектов этих пространств.

Исследовательская часть работы посвящена решению следующих задач.

1. Проверка аксиом метрики для некоторых введенных расстояний.
2. Построение окружностей и описание их свойств в рассмотренных метрических пространствах.
3. Знакомство с понятиями эллипс, гипербола и парабола.
4. Вывод уравнений эллипса, гиперболы и параболы в метрике таксиста, построение этих линий в системе координат.

В работе использованы алгебраические методы, теория неравенств, методы аналитической геометрии. Необходимость проверки аксиом метрики, построение геометрических объектов, изучение свойств, сформулирована в литературе [1-4] в виде упражнений для самостоятельного решения. Уравнения эллипса, гиперболы, параболы в метрике таксиста в литературе не опубликованы.

§1. Аксиомы метрики.

Рассмотрим понятие метрики, метрического пространства, его аксиомы [4].

Обозначим расстояние между точками X и Yсимволом ρ (X;Y).

1. Расстояние между точками на плоскости не отрицательно:

$$\rho\ (X;Y)\geq 0.$$

2. Расстояние между точками X и Y равно нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают:

$$\rho\ (X;Y)=0 \Leftrightarrow X=Y.$$

3. Расстояние между точками X и Y равно расстоянию между Y и X:

$$\rho(X;Y)= \rho(Y;X).$$

4. Для произвольных точек X, Y, Z выполняется неравенство треугольника, то есть:

$$\rho(X;Y) \leq \rho(X;Z)+\rho(Z;Y).$$

Если аксиомы выполняются для некоторого расстояния ρ, определенного для любых пар точек некоторого пространства, то это расстояние называется *метрикой*, а пространство, из которого берутся точки, - *метрическим пространством*.

Но не все расстояния являются метрикой, рассмотрим пример.

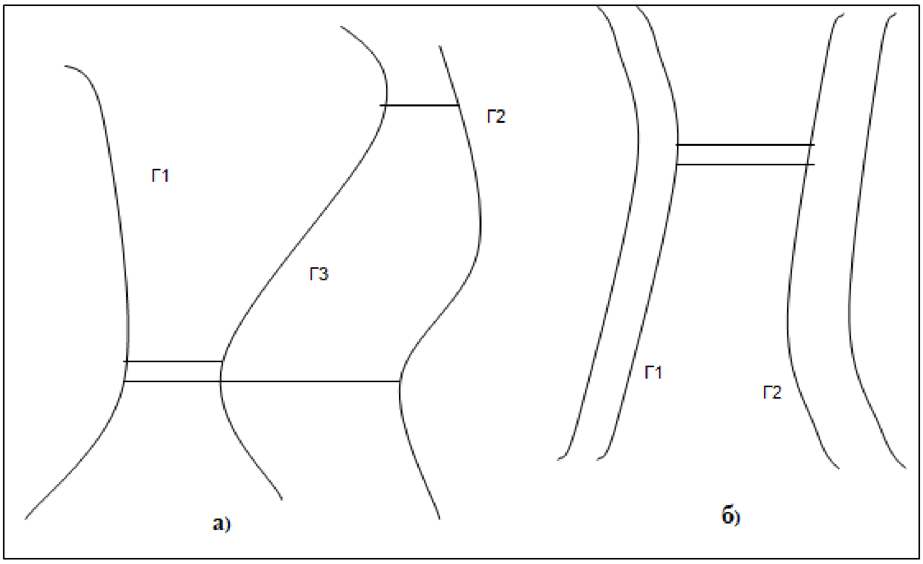


Рисунок 1.

На карте местности (рисунок 1б) изображены 2 речки кривыми $Г_1$ и $Г_2$ соответственно. Необходимо построить между ними канал (отрезок). Расстояние между двумя речками – это длина самого короткого отрезка из возможных между ними. Введем расстояние:

$$\rho\ (Г_1,Г_2) = \min \rho\ (X,Y).$$

Это разумно определенное расстояние, но оно не удовлетворяет четвертой аксиоме метрики. Действительно, для трех речек $Г_1$, $Г_2$, $Г_3$, изображенных на рисунке 1а:

$$\rho\ (Г_1,Г_2)> \rho\ (Г_1,Г_3) + \rho\ (Г_3,Г_2)$$

т.к. расстояние между $Г_1$ и $Г_2$ довольное большое по сравнению с расстоянием между речками $Г_1$и $Г_3$ или между $Г_3$ и $Г_2$. Таким образом, данный пример расстояний нельзя назвать метрикой, т.к. оно не удовлетворяет четвертой аксиоме метрики. Поэтому пространство кривых с таким расстоянием не является метрическим пространством.

Вывод: для того, что бы рассматриваемое расстояние являлось метрикой, необходима проверка выполнения аксиом для этого расстояния.

§2. Примеры метрических пространств.

Знакомое нам метрическое пространство называется евклидовым пространством. Евклидово расстояние между точками $A(x_1\ y_1)$ и $B(x_2,\ y_2)$ определяется как длина отрезка, соединяющего эти точки, и вычисляется по формуле $\rho(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Но такой способ измерения расстояния не всегда удобен.

Допустим, мы находимся в городе с очень правильной планировкой (например, в г. Сочи), [3]. В таком городе нет смысла пользоваться евклидовой метрикой, если нас интересует расстояние от одного перекрестка А до другого В, разумно взять за расстояние между ними длину кратчайшего пути по улицам города от пункта А до пункта В, такое расстояние будет естественным с точки зрения водителя, который не может проезжать по прямой (рисунок 2).

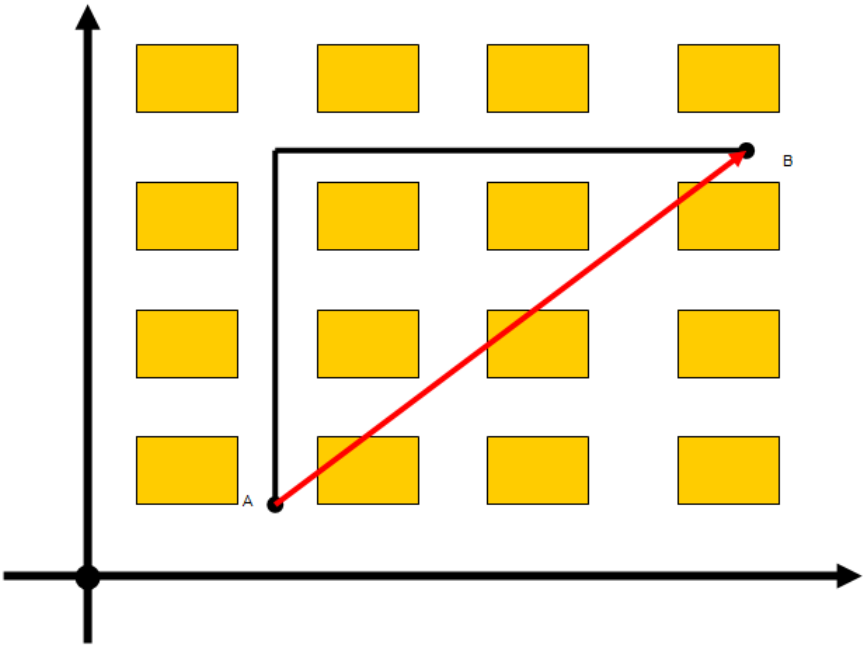


Рисунок 2.

Запишем это расстояние в координатах: если т.А имеет координаты $(x_1\ y_1)$, а т.В координаты (x_2, y_2), то расстояние ρ_1 определяется формулой:

$$\rho_1\ (A,B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|. \tag{1}$$

Проверим, что расстояние между точками А ($x_1\ y_1$) и В ($x_2\ y_2$) определяемое по формуле (1) является метрикой.

Решение. Проверим выполнение четырех аксиом метрики на данном расстоянии.

Аксиома 1: $\rho\ (A,B)\geq 0$ – выполняется. Действительно, $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|\geq 0$, так как модуль числа всегда неотрицателен.

Аксиома 2: $\rho\ (A;B)=0 \Leftrightarrow A=B$ – выполняется, т.к. $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|=0$, если $|x_2 - x_1|=0$ и $|y_2 - y_1|=0$ $\quad x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$ $\quad$ т.е. точки совпадают $(x_1\ y_1)= (x_2\ y_2)$=> т. А = т. В

Аксиома 3: $\rho\ (A, B)=\rho\ (B, A)$ – выполняется, т.к. следующее равенство: $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ верно.

Аксиома 4: $\rho\ (A,C) \leq \rho(A,B) + \rho(B,C)$,

где $\rho\ (A,C)= |x_3 - x_1| + |y_3 - y_1|$;

$\rho\ (A,B)= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$;

$\rho\ (B,C)= |x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|$;

примет вид: $|x_3 - x_1| + |y_3 - y_1| \le |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|$.

Рассмотрим неравенство, связывающее абсциссы точек: $|x_3 - x_1| \le |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1|$. Его можно переписать в следующем виде: $|x_3 - x_2 + x_2 - x_1| \le |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1|$. Последнее неравенство верно, так как модуль суммы двух слагаемых $(x_3 - x_2)$ и $(x_2 - x_1)$ не превосходит суммы модулей этих слагаемых. Последнее утверждение можно доказать от противного. Предположим, что неравенство $|a+b| \le |a| + |b|$ неверно для каких либо слагаемых, тогда найдутся слагаемые, для которых верно, что $|a+b| > |a| + |b|$. Возведем обе части верного числового равенства в квадрат, учитывая, что они неотрицательны, получим: $a^2 + b^2 + 2a \cdot b > a^2 + b^2 + 2|a| \cdot |b|$. Упростив последнее неравенство, получим, что $a \cdot b > |a| \cdot |b|$, а это неравенство неверно, так как известно, что каждое число $z \le |z|$. Наше предположение неверно, следовательно, неравенство $|a+b| \le |a|+|b|$ верно, следовательно, $|x_3 - x_2 + x_2 - x_1| \le |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1|$ тоже верно, и окончательно $|x_3 - x_1| + |y_3 - y_1| \le |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|$ является верным. Аксиома 4 выполняется.

Таким образом, расстояние, определяемое формулой (1), удовлетворяет аксиомам метрики. Эта метрика называется *метрикой таксиста*.

На той же плоскости (рисунок 2) рассмотрим другой вариант расстояния, [2], определяемого формулой:

$$\rho'(A,B) = \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|). \qquad (2)$$

Указанное расстояние ρ´ может иметь такой **физический смысл**: необходимо поддерживать определенную температуру в двух комнатах, и измерять её двумя термометрами. Пусть в первой комнате необходима температура x_1° С, а во второй – y_1° С, а показания термометров в комнатах x_2°С и y_2°С соответственно. Тогда определённое по формуле (2) расстояние ρ´ показывает, на сколько градусов произошло отклонение температуры от нормы.

Расстояние между точками A (X_1 Y_1) и B (X_2 Y_2), определяемое по формуле (2), является метрикой.

Решение. Проверим выполнение четырех аксиом метрики на данном расстоянии.

Аксиома 1: $\rho'(A,B) \ge 0$. Действительно, т.к. $|x_2 - x_1| \ge 0$ и $|y_2 - y_1| \ge 0$, то $\max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|) \ge 0$.

Аксиома 2: $\rho'(A;B)=0 \Leftrightarrow A=B$ – выполняется. Если $\rho'=0$, то $\max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)=0$, значит $|y_2 - y_1|=0$ и $|x_2 - x_1|=0$, тогда $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ следовательно (X_1 Y_1) = (X_2 Y_2) => т.А = т.В, точки совпадают.

Аксиома 3: $\max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$, выполняется, т.к. $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$ и $|y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$.

Аксиома 4: $\max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|) \le \max(|x_3 - x_1|, |y_3 - y_1|) + \max(|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|)$.

Проверка аксиомы 4 основывается на известном неравенстве:

$$|a + b| \le |a| + |b| \qquad (*)$$

Возможны различные случаи:

Например, $\max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|) = |x_2 - x_1|$, тогда $|y_2 - y_1| \le |x_2 - x_1|$; если при этом

$\max(|x_3 - x_1|, |y_3 - y_1|) = |x_3 - x_1|$ и $\max(|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|) = |x_2 - x_3|$, тогда

$|x_2 - x_1| = |x_2 - x_1 + x_3 - x_3| = |(x_3 - x_1) + (x_2 - x_3)|$, используем неравенство (*), получим:

$|(x_3 - x_1) + (x_2 - x_3)| \le |x_3 - x_1| + |x_2 - x_3|$, тогда неравенство

$|x_2 - x_1| \le |x_3 - x_1| + |x_2 - x_3|$ верно.

Проверка остальных случаев приведена в приложении 1.

Вывод: кроме пространств с евклидовой метрикой существуют, неевклидовы метрические пространства, в которых расстояние определено формулами (1) и (2).

§3. Примеры геометрических объектов в метрических пространствах.

Если на множестве определено расстояние, то с его помощью можно описать геометрические объекты пространства.

Единичный шар – это множество точек, которые удалены от центра на расстояние не большее, чем 1. Формальная запись такого множества: $\{A|\ \rho(A, O) \le 1\}$.

Для евклидова расстояния ρ единичный шар на плоскости будет обычным кругом.

Единичный шар с центром в нуле с точки зрения расстояния ρ_1, определённого формулой (1), будет выглядеть иначе. Точка А тогда и только тогда принадлежит единичному шару с центром в нуле для этой метрики, когда выполнено неравенство $|x|+|y|\le 1$. Все такие точки А принадлежат квадрату (рисунок 3).

Для **построения** раскроем модули:

I. Если, $x \ge 0$, $y \ge 0$, то
$y \le 1- x$.

II. Если, $x \le 0$, $y > 0$, то
$y \le 1 + x$.

III. Если, $x < 0$, $y < 0$, то
$y \le - x - 1$.

IV. Если, $x > 0$, $y < 0$, то
$y \le x - 1$.

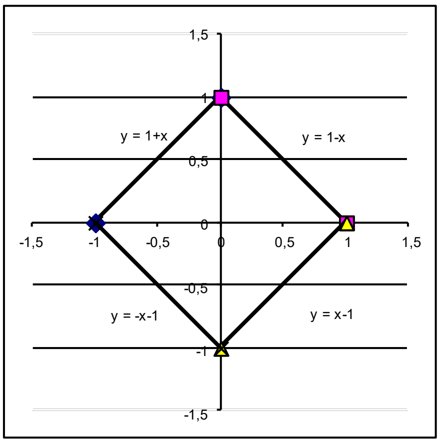


Рисунок 3.

Единичный шар с точки зрения расстояния ρ', определенного формулой (2), также будет принадлежать квадрату, но со сторонами параллельными осям, при этом должно выполняться неравенство $1 \ge \max(|x|;|y|)$ (Рисунок 4).

Построение.

I. Если, $x \ge 0$, $y \ge 0$, то
$1 \ge \max(x\ ;\ y)$

1. $\max(x\ ;\ y) = x \le 1$, тогда $0 < y < 1$.

2. $\max(x\ ;\ y) = y \le 1$, тогда $0 < x < 1$.

II. Если, $x < 0$, $y > 0$, то
$1 \ge \max(-x\ ;\ y)$

1. $\max(-x\ ;\ y) = -x \le 1$; $x \ge -1$, тогда $0 < y < 1$.

2. $\max(-x\ ;\ y) = y \le 1$, тогда $0 < -x < 1$; $-1 < x < 0$.

III. $x < 0$, $y < 0$
$1 \ge \max(-x;\ -y)$

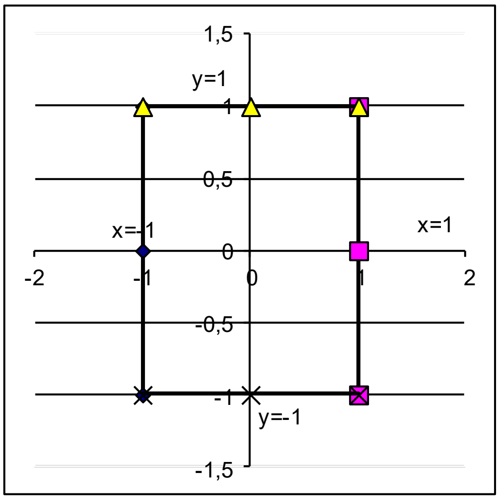


Рисунок 4.

1. $\max(-x;\ -y) = -x \le 1$; $-1 \le x \le 0$, тогда $0 < -y < 1$, $-1 < y < 0$.

2. $\max(-x;\ -y) = -y \le 1$, следовательно, $-1 \le y < 0$, тогда $-1 < x < 0$.

IV. $x > 0$, $y < 0$
$1 \ge \max(x;\ -y)$

1. $\max(x;\ -y) = x \le 1$; $-1 < y < 0$.

2. $\max(x;\ -y) = -y \le 1$; $0 < x < 1$.

Можно заметить следующие свойства окружности в пространстве с метрикой ρ':

1) существуют различные окружности, имеющие бесконечно много общих точек (рисунок 5);
2) существуют не вложенные один в другой круги, которые пересекаются по кругу (рисунок 6).

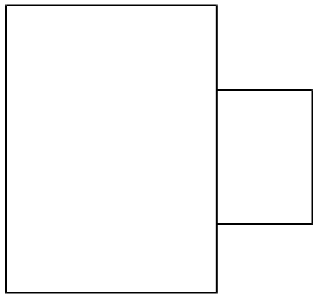


Рисунок 5.

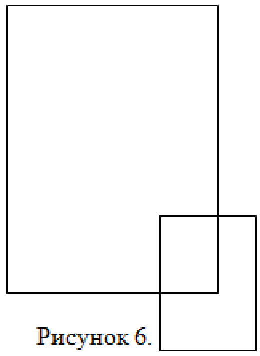


Рисунок 6.

Вывод: геометрия рассмотренных метрических пространств отличается от евклидовой.

§4. Хаусдорфова метрика.

Рассмотрим пример метрического пространства, элементами которого являются не точки, а более сложные объекты, например, кривые, [1,4].

Две дороги (пусть одна – кривая Γ_1 , а вторая – Γ_2) и машина поливающая эти дороги (машина поливает всё вокруг себя, т.е. вся окрестность машины до определенного радиуса поливается водой). Пусть этот радиус можно менять (рисунок 7). Если машина едет по дороге Γ_1, то какой наименьший радиус полива ей надо установить, чтобы она поливала всю дорогу Γ_2?

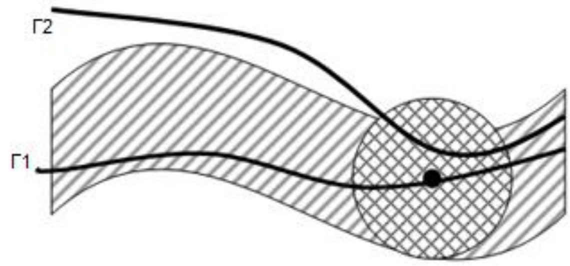


Рисунок 7.

Обозначим точки дороги (кривой) Γ_1 через x, а точки дороги Γ_2 – через y. Зафиксируем точку y на кривой Γ_2. Чтобы была полита точка y, машине нужно установить радиус равный: $R(y) = \min(x,y)$, $x \in \Gamma_1$. Заметим, что при меньшем радиусе точка y полита, не будет. Но, т.к. необходимо полить все точки Γ_2, то возьмём самый большой из всех радиусов $R(y)$: $R_1 = \max \min p(x,y)$, $y \in \Gamma_2$ $x \in \Gamma_1$. Но при меньшем радиусе, найдется точка y, принадлежащая Γ_2, которая полита не будет. Теперь возьмём за расстояние между кривыми Γ_1 и Γ_2 этот радиус.

Данное расстояние ещё не является метрикой, т.к. оно не удовлетворяет аксиоме симметрии. Действительно, если машина проедет по дороге Γ_1 и польёт дорогу Γ_2, то совсем не обязательно, что она польёт дорогу Γ_1, проезжая по дороге Γ_2, не увеличивая при этом радиуса полива. Ведь когда машина проезжает по второй дороге, и пытается полить первою, нужно установить радиус полива, как минимум: $R_2 = \max \min p(x,y)$, $x \in \Gamma_1$, $y \in \Gamma_2$ А чтобы выполнялась аксиома симметрии, возьмем расстояние: $\rho_н(\Gamma_1\Gamma_2) = \max\{\max \min \rho(x,y), \max \min \rho(x,y)\}$, $y \in \Gamma_2$ $x \in \Gamma_1$.

Данная метрика называется хаусдорфовой метрикой в пространстве кривых. Но при этом все кривые, рассмотренные в данном пространстве, были замкнутыми, в том смысле, что им принадлежат по крайне мере концевые точки. Иначе не выполнилась бы вторая аксиома метрики (расстояние между точками X и Y равно нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают).

Вывод: у неевклидовых метрик есть разнообразное применение, в частности, отмеченный выше способ определения расстояния может быть применен, например, в военном деле, если выбирать не радиус полива, а зону обстрела.

§5. Эллипс в метрическом пространстве с метрикой таксиста.

В §3 приведены примеры единичных шаров в метриках ρ_1 и ρ'. Нас заинтересовал вопрос, как выглядят другие известные геометрические объекты в новых метриках? В этом параграфе получено уравнение эллипса в метрике таксиста.

Будем использовать известное определение эллипса.

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

$F_1M+F_2M = 2a$, обозначим расстояние между фокусами $F_1F_2=2c$. Координаты фокусов $F_1(c, 0)$ $F_2(-c,0)$.

Рассмотрим в евклидовой метрике.

$$\sqrt{y^2+(x+c)^2}+\sqrt{y^2+(x-c)^2}=2a^2,\ a,\ c>0,$$

возведем обе части последнего равенства в квадрат, получим:

$$(x+c)^2+y^2+2\sqrt{((x+c)^2+y^2)(y^2+(x-c)^2)}+(x-c)^2+y^2=4a^2,$$

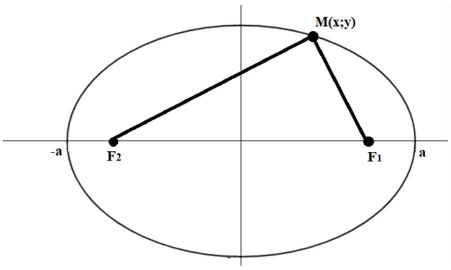
$$x^2+2xc+c^2+y^2+x^2-2xc+c^2+\ y^2+2\sqrt{(x^2+2xc+c^2+y^2)(x^2-2xc+c^2+\ y^2)}=4a^2,$$

$$2\sqrt{(x^2+2xc+c^2+y^2)(x^2-2xc+c^2+\ y^2)}=4a^2-2x^2-2c^2-2y^2.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части последнего равенства, упростим выражение, получим:

$$-x^2c^2-a^4+x^2a^2+a^2c^2+a^2y^2=0.$$

Сгруппируем, $x^2\ (a^2-c^2)+y^2a^2-a^2(a^2-c^2)=0$, введем обозначение $a^2-c^2=b^2$, так как $a>c$. Тогда $x^2b^2+y^2a^2=a^2b^2$. Окончательно получим $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение эллипса в евклидовой метрике.



Получим каноническое уравнение эллипса в метрике таксиста.

$F_2M = |x+c|+|y-0|$ - расстояние до фокуса F_2, $F_1M = |x-c|+|y-0|$ - расстояние до фокуса F_1. Далее по определению эллипса получим, $|x+c|+|y|+|x-c|+|y| = 2a$, преобразуем.

Уравнение эллипса в метрике таксиста имеет вид $|x+c|+|x-c|+2|y| = 2a$.

Построим эллипс в системе координат. По условию $a>0$, $c>0$.

1) $x<-c$, тогда можно раскрыть модули
   $-x-c-x+c+2|y| = 2a$
   $|y| = x+a$.
2) $-c\leq x\leq c$
   $x+c-x+c+2|y| = 2a$
   $|y| = a-c$, по условию $a>c$.
3) $x>c$
   $x+c+x-c+2|y| =2a$
   $|y| = a-x$.

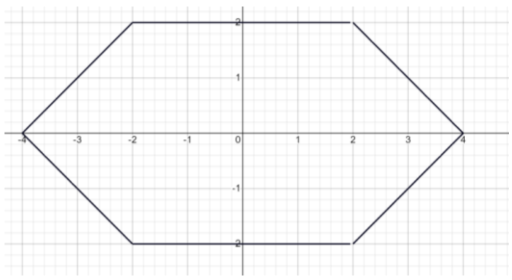


Рисунок 8.

Эллипс $|x+2|+|x-2|+2|y|=8$ в метрике таксиста имеет вид, представленный на рисунке 8, $a = 4$, $c = 2$.

§6. Гипербола в метрическом пространстве с метрикой таксиста.

Получим уравнение гиперболы.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, по модулю меньшая, чем расстояние между фокусами. $||F_1M|-|F_2M|| = 2a$, $0 < a < c$.

В евклидовой метрике.

$$\left|\sqrt{y^2+(x+c)^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a.$$

Возведем обе части в квадрат.

$$y^2+(x+c)^2+(x-c)^2+y^2-2\sqrt{y^2+(x+c)^2}*\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2.$$

Упростим и еще раз возведем в квадрат.

$$(x^2+c^2+y^2-2a^2)^2=(x^2-c^2)^2+y^2(2x^2+2c^2)+y^4.$$

Раскроем скобки.

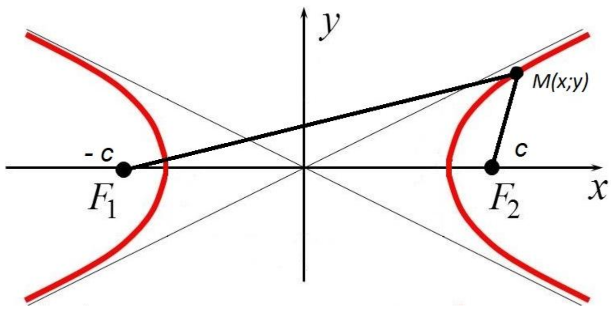
$$x^2c^2-x^2a^2-a^2c^2-y^2a^2+a^4=0.$$

Сгруппируем слагаемые и обозначим $c^2-a^2=b^2$.

$$x^2(c^2-a^2)-a^2(c^2-a^2)-y^2a^2=0.$$

$$x^2b^2-y^2a^2=a^2b^2.$$

Разделим обе части равенства на a^2b^2, получим каноническое уравнение гиперболы в евклидовой метрике: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.



Гипербола в метрике таксиста.

По определению

$$||F_1M|-|F_2M||=2a,\ |F_1M| = |x + c| + |y|,\ |F_2M| = |x - c| + |y|,$$

тогда $||x + c| + |y| - |x - c| - |y|| = 2a$, упростим, получим $||x + c| - |x - c|| = 2a$.

Уравнение гиперболы в метрике таксиста имеет вид $||x + c| - |x - c|| = 2a$.

1) $x < -c$

$|-x - c + x - c| = 2a$, тогда $|-2c| = 2a$, $c = a$, по условию $0 < a < c$, значит, не существует точек на гиперболе, удовлетворяющих этим условиям.

2) $-c \le x \le c$, тогда $|x + c + x - c| = 2a$, следовательно, $|x| = a$, $0 < a < c$, значит, точки гиперболы лежат на вертикальных прямых $x = a$ и $x = -a$.

3) $x > c$, тогда $|x+c-x+c|=2a$, снова $c = a$, решений нет.

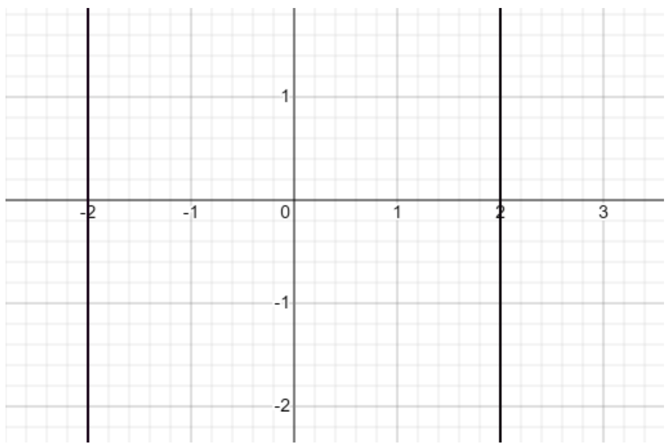


Рисунок 9.

Гипербола $||x + 4| - |x - 4|| = 4$ в метрике таксиста имеет вид, представленный на рисунке 9, $a = 2$, $c = 4$.

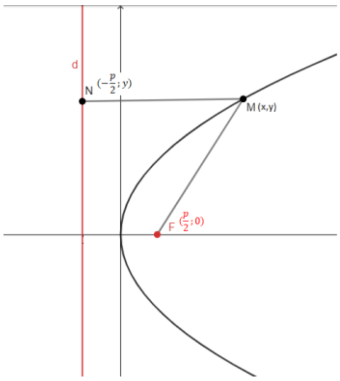
§7. Парабола в метрическом пространстве с метрикой таксиста.

Рассмотрим еще одну знакомую фигуру – параболу.

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от прямой d и точки F. Прямая d называется директрисой, а точка F — фокусом параболы.

Выберем директрису параллельно оси ординат, фокус на оси абсцисс, так, чтобы они находились на одинаковом расстоянии равном $\frac{p}{2}$, $p > 0$ от начала координат.

Рассмотрим в евклидовой метрике. Обозначим r-расстояние от точек параболы до директрисы. r(M;d) = $x + \frac{p}{2}$ и MF=$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}$, тогда получим $x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}$. Возведем в квадрат. $x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2$. Каноническое уравнение параболы в евклидовой метрике имеет вид $y^2 = 2px$.



Парабола в метрике таксиста.

Сначала необходимо определить расстояние от точки до директрисы в метрике таксиста. Под директрисой d в новом метрическом пространстве мы будем понимать ту же геометрическую фигуру, что и в евклидовой плоскости, расположение в системе координат не меняется. Под расстоянием от точки M, не лежащей на директрисе, до директрисы d будем понимать наименьшее из расстояний от точки M до каждой точки директрисы d. Очевидно, что расстояние от M будет наименьшим до точки, лежащей в основании перпендикуляра, опущенного из M на директрису. Следовательно, r(M;d) = $x + \frac{p}{2}$. MF = $|x - \frac{p}{2}| + |y|$. Тогда,

$x + \frac{p}{2} = |x - \frac{p}{2}| + |y|$, значит, $|y| = x + \frac{p}{2} - |x - \frac{p}{2}|$.

Уравнение параболы в метрике таксиста имеет вид $|y| = x + \frac{p}{2} - |x - \frac{p}{2}|$.

1) $x < \frac{p}{2}$

$|y| = x + \frac{p}{2} + x - \frac{p}{2} = 2x$, $|y| = 2x$, точки параболы лежат на прямых y = $2x$, $y = -2x$.

2) $x \geq \frac{p}{2}$

$|y| = x + \frac{p}{2} - x + \frac{p}{2}$

$|y| = p$, точки параболы в метрике таксиста лежат на прямых $y = p$, $y = -p$.

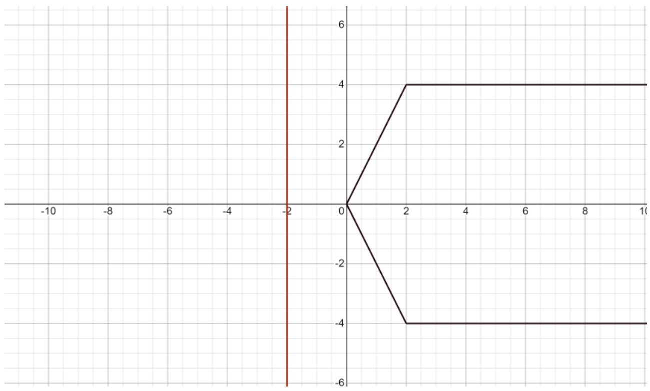


Рисунок 10.

Парабола $|y| = x + 2 - |x - 2|$ в метрике таксиста имеет вид, представленный на рисунке 10, p = 4.

Заключение

В работе получены и обоснованы следующие результаты.

1) Проверены аксиомы метрики для некоторых введенных расстояний.
2) Построены окружности и описаны некоторые их свойств в рассмотренных метрических пространствах.
3) Получены уравнения эллипса, гиперболы и параболы в метрике таксиста.
4) Построены примеры этих линий в системе координат.

Список использованной литературы

1. Долженко Е. П. Как измеряют расстояние между функциями / Е. П. Долженко, В. А. Скворцов // Математика в школе. - № 6. – 1977. – С. 51-88.
2. Егоров И.П. Геометрия (О системах аксиом евклидовой геометрии. Обобщенные пространства). Изд. стереотип. –М.: URSS. 2016. 256 с.
3. Скворцов В. А. Примеры метрических пространств / В. А. Скворцов. – М.: МЦНМО, 2002.
4. Шрейдер Ю. А. Что такое расстояние? / Ю. А. Шрейдер // Популярные лекции по математике. – Вып. 38. – М.: Физматгиз, 1963.

Приложение 1

Расстояние между точками А (X_1 Y_1) и В (X_2 Y_2), определяемое по формуле (2), является метрикой.

Доказательство. Проверим оставшиеся случаи для аксиомы 4.

1. max ($|x_3 - x_1|$, $|y_3 - y_1|$) = $|x_3 - x_1|$,

max ($|x_2 - x_3|$, $|y_2 - y_3|$) = $|y_2 - y_3|$ => $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$,

$|x_2 - x_1| \leq |x_2 - x_3| + |x_3 - x_1|$ (известно),

$|x_2 - x_3| \leq |y_2 - y_3|$ (по условию) => $|x_2 - x_3| + |x_3 - x_1| \leq |y_2 - y_3| + |\,|x_3 - x_1|$, тогда

$|x_2 - x_1| \leq |y_2 - y_3| + |x_3 - x_1|$;

2. max ($|x_3 - x_1|$, $|y_3 - y_1|$) = $|y_3 - y_1|$ => $|y_3 - y_1| \geq |x_3 - x_1|$,

max ($|x_2 - x_3|$, $|y_2 - y_3|$) = $|x_2 - x_3|$.

Известно, $|x_2 - x_1| \leq |x_2 - x_3| + |x_3 - x_1|$.

По условию $|y_3 - y_1| \geq |x_3 - x_1|$, тогда

$|y_3 - y_1| + |x_2 - x_3| \geq |x_3 - x_1| + |x_2 - x_3| \geq |x_2 - x_1|$, следовательно,

$|y_3 - y_1| + |x_2 - x_3| \geq |x_2 - x_1|$ (верно);

3. max ($|x_3 - x_1|$, $|y_3 - y_1|$) = $|y_3 - y_1|$,

max ($|x_2 - x_3|$, $|y_2 - y_3|$) = $|y_2 - y_3|$.

По условию $|y_3 - y_1| \geq |y_3 - y_1|$,

$|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$.

Известно: $|x_2 - x_1| \leq |x_2 - x_3| + |x_3 - x_1| \leq |y_3 - y_1| + |y_2 - y_3|$,

$|x_2 - x_1| \leq |y_3 - y_1| + |y_2 - y_3|$ (верно);

4. max ($|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$) = $|y_2 - y_1|$;

5. max ($|x_3 - x_1|$, $|y_3 - y_1|$) = $|x_3 - x_1|$,

max ($|x_2 - x_3|$, $|y_2 - y_3|$) = $|x_2 - x_3|$,

$|y_2 - y_1| \leq |x_3 - x_1| + |x_2 - x_3|$.

По условию, $|x_2 - x_1| \leq |y_2 - y_1|$, тогда

$|y_3 - y_1| \leq |x_3 - x_1|$,

$|y_2 - y_3| \leq |x_2 - x_3|$,

известно: $|y_2 - y_1| \leq |y_3 - y_1| + |y_2 - y_3| \leq |x_3 - x_1| + |x_2 - x_3|$, получим

$|y_2 - y_1| \leq |x_3 - x_1| + |x_2 - x_3|$;

6. max ($|x_3 - x_1|$, $|y_3 - y_1|$) = $|x_3 - x_1|$,

max $|x_2 - x_3|$, $|y_2 - y_3|$ = $|y_2 - y_3|$,

По условию, $|x_2 - x_3| \leq |y_2 - y_3|$,

$|y_3 - y_1| \leq |x_3 - x_1|$,

известно: $|y_2 - y_1| \leq |x_3 - x_1| + |x_2 - x_3| \leq |x_3 - x_1| + |y_2 - y_3|$, следует

$|y_2 - y_1| \leq |x_3 - x_1| + |y_2 - y_3|$ (верно);

7. $\max(|x_3 - x_1|, |y_3 - y_1|) = |y_3 - y_1|$,

$\max(|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|) = |x_2 - x_3|$,

$|y_2 - y_1| \leq (|y_3 - y_1| + |x_2 - x_3|)$.

По условию $|y_2 - y_3| \leq |x_2 - x_3|$,

Известно, $|y_2 - y_1| \leq |y_3 - y_1| + |y_2 - y_3| \leq |y_3 - y_1| + |x_2 - x_3|$, отсюда

$|y_2 - y_1| \leq |y_3 - y_1| + |x_2 - x_3|$ (верно);

8. $\max(|x_3 - x_1|, |y_3 - y_1|) = |y_3 - y_1|$,

$\max(|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|) = |y_2 - y_3|$,

$|y_2 - y_1| = |y_3 - y_1| + |y_2 - y_3|$.

Расстояние, определенное метрикой ρ', удовлетворяет всем аксиомам.

Рецензия
на учебно-исследовательскую работу
ученицы 9 класса МБОУ «Гимназия №53» г. Пензы
Салитовой Ангелины Артемовны «Знакомые фигуры в незнакомой метрике»

Пространство, в котором определено расстояние между любыми точками (задана метрика), называют метрическим пространством. Принятый в евклидовой геометрии способ измерения расстояния не всегда удобен на практике, например, с точки зрения водителя, измеряющего расстояние между двумя пунктами не по прямой, а вдоль дорог, соединяющих эти пункты.

Геометрия пространств с неевклидовой метрикой отличается от привычной геометрии. Многие геометрические объекты приобретают новые свойства, интересные не только с теоретической, но и с практической точки зрения.

Исследовательская часть работы посвящена решению следующих задач.

5. Проверка аксиом метрики для некоторых введенных расстояний.
6. Построение окружностей и описание их свойств в рассмотренных метрических пространствах.
7. Знакомство с понятиями эллипс, гипербола и парабола.
8. Вывод уравнений эллипса, гиперболы и параболы в метрике таксиста, построение этих линий в системе координат.

В работе использованы алгебраические методы, теория неравенств, методы аналитической геометрии. Уравнения эллипса, гиперболы, параболы в метрике таксиста получены автором работы самостоятельно и в литературе не опубликованы.

Считаю, что работа может быть представлена для участия в конференции.

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук
доцент кафедры «Математическое образование» ПГУ Монахова О.А.